Intégrale de Riemann

Exercice 1. *Densité des fonctions en escalier*

Soit $f\ :[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $g\ :[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ en escalier, $\displaystyle\int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Démontrer que $f=0$.

Exercice 2. *zéros*

Soit $f\ :[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue non identiquement nulle, telle que : $\forall\ k\in\{0,1,\dots,n-1\}$, $\displaystyle\int_{t=a}^{b} t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Démontrer que f s'annule au moins n fois sur $]a,b[$ (raisonner par l'absurde).

Exercice 3. *Formule de la moyenne généralisée*

Soient $f,g\ :[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continues, f positive.

1) Démontrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $\displaystyle\int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(c)\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2) Si f ne s'annule pas, montrer que $c\in\,]a,b[$.

3) Application : Soit f continue au voisinage de 0. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_{t=0}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4. *Inégalité de Jensen*

Soit $f\ :[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue et $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue convexe.
Démontrer que $\displaystyle g\left(\frac{1}{b-a}\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_{t=a}^{b} g(f(t))\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5. $\sqrt{1+f^2}$

Soit $f\ :[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue positive. On pose $\displaystyle A=\int_{t=0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que $\displaystyle\sqrt{1+A^2}\leqslant\int_{t=0}^{1}\sqrt{1+f^2(t)}\,\mathrm{d}t\leqslant 1+A$.

Exercice 6. *Calcul de limite*

Chercher $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_{t=x}^{2x}\frac{\cos t\,\ln(1+t^2)}{\sin^2 t\,\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7. *Calcul de limite*

Pour $0<a<b$, déterminez $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_{t=ax}^{bx}\frac{1-\cos u}{u^3}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 8. $\int f+\int f^{-1}$

Soit $f\ :[a,b]\longrightarrow[c,d]$ continue, bijective, strictement croissante.
Calculer $\displaystyle\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{u=c}^{d} f^{-1}(u)\,\mathrm{d}u$ (faire un dessin, et commencer par le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$).

Exercice 9. *Sommes de Riemann*

1) Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{kn}$ pour k entier supérieur ou égal à 2 fixé.

2) Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\Big(\sqrt{1(n-1)}+\sqrt{2(n-2)}+\dots+\sqrt{(n-1)1}\Big)$.

3) Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\left(1+\tfrac{2}{n}\right)\dots\left(1+\tfrac{n}{n}\right)}$.

4) Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\tfrac{\pi}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+\cos(3k\pi/n)}$.

5) Donner un équivalent pour $n\to\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

6) Soit $A_1A_2\dots A_n$ un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Chercher $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} A_1A_k$.

Exercice 10. *Calcul de limite*
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Chercher $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right)$.

Exercice 11. *Moyenne géométrique*
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\left(1 + \frac{1}{n} f(\frac{1}{n})\right)\left(1 + \frac{1}{n} f(\frac{2}{n})\right)\dots\left(1 + \frac{1}{n} f(\frac{n}{n})\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp \int_{t=0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.
(On pourra utiliser : $\forall\, x \geqslant -\frac{1}{2},\ x - x^2 \leqslant \ln x \leqslant x$)

Exercice 12.
1) Montrer que : $\forall\, x \geqslant 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2) Trouver $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2+n^2}\right)^n$.

Exercice 13. *Maximum-minimum*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence des suites (a_n), (b_n) définies par :

$$a_0 = a,\ b_0 = b, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{x=-1}^{1} \min(x, b_n)\,\mathrm{d}x,\ b_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{x=-1}^{1} \max(x, a_n)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 14. *Intégrale de* $\ln|x - e^{it}|$
Pour $x \in \mathbb{R},\ x \neq \pm 1$, on pose $I = \int_{t=0}^{2\pi} \ln|x - e^{it}|\,\mathrm{d}t$. En utilisant les sommes de Riemann, calculer I.

Exercice 15. *Intégrale de* $|f|$
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{t=a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\right|$ où $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$.
Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{t=a}^{b} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Exercice 16. *Usage de symétrie*
Soit $I = \int_{t=0}^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$. Effectuer dans I le changement de variable $u = \pi - t$, et en déduire la valeur de I.

Exercice 17. *Usage de symétrie*
Calculer $I = \int_{t=0}^{\pi} \frac{t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 18. *Usage de symétrie*
Calculer $\int_{t=0}^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t$. On remarquera que $\cos t + \sin t = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$.

Exercice 19. *École de l'air 94*
On note $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{2-\cos x}\,\mathrm{d}x$, $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos nx}{2-\cos x}\,\mathrm{d}x$, $K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos nx}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = J_n + (-1)^n K_n$ et $I_{n+1} = 4I_n - I_{n-1}$. En déduire I_n en fonction de n.

Exercice 20. *Calcul d'intégrale*
Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_{x=0}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2(nx)}$.

Exercice 21. arcsin *et* arccos
Simplifier $\int_{t=0}^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 22. *Approximation des rectangles pour une fonction lipchitzienne*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ K-lipchitzienne. Montrer que $\left|\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \frac{K(b-a)^2}{2n}$.

Exercice 23. *Approximation des tangentes*

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on note : $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, $a_{k+\frac{1}{2}} = \dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$.

Soit $I_n = \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(a_{k+\frac{1}{2}})$.

1) Donner une interprétation géométrique de I_n.

2) Montrer que $\left|\displaystyle\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t - I_n\right| \leqslant \dfrac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$ où $M_2 = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$.

Exercice 24. *Approximation des trapèzes*

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1) Montrer que $\displaystyle\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_{t=a}^{b} \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t$.

2) Application : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $I = \displaystyle\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$, et I_n la valeur approchée de I obtenue par la méthode des trapèzes avec n intervalles. Démontrer que $|I - I_n| \leqslant \dfrac{\sup|f''|(b-a)^3}{12n^2}$.

Exercice 25. *Calcul de limite*

Étudiez la limite de la suite définie par $u_n = \dfrac{n}{2} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n^2}{(n+k)^2}$.

Exercice 26. *Aire sous une corde*

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On pose $M' = \|f'\|_\infty$.

1) En majorant f par une fonction affine par morceaux, démontrer que $\left|\displaystyle\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M'\dfrac{(b-a)^2}{4}$.

2) Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 27. *Échange de décimales*

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ définie par $f(0,a_1a_2a_3\ldots) = 0,a_2a_1a_3\ldots$ (échange des deux 1ères décimales).

Montrer que f est continue par morceaux et calculer $\displaystyle\int_{t=0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 28. $\int f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$

Soit $f : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe de classe $\mathcal{C}^2$. Quel est le signe de $I = \displaystyle\int_{t=0}^{2\pi} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t$?

Exercice 29. *Convexité*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et $g(x) = \displaystyle\int_{t=x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que g est convexe.

Exercice 30. *Expression d'une primitive n-ème de f*

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $g(x) = \displaystyle\int_{t=a}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $g^{(n)} = f$.

Exercice 31. *Thm de division*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+p}$ telle que $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$.

On pose $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^n}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

1) Écrire $g(x)$ sous forme d'une intégrale.

2) En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^p$ et $|g^{(p)}(x)| \leqslant \dfrac{p!}{(p+n)!}\sup\{|f^{(n+p)}(tx)| \text{ tq } 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

Exercice 32. *Fonction absolument monotone*

Soit $f : [0,a[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que f et toutes ses dérivées sont positives sur $[0,a[$.

1) Montrer que la fonction $g_n : x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}\left(f(x) - f(0) - \ldots - \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)\right)$ est croissante.

2) On fixe $r \in]0,a[$. Montrer que la série de Taylor de f converge vers f sur $[0,r[$.

Exercice 33. *2ème formule de la moyenne*

Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, f positive décroissante.

On note $G(x) = \int_{t=a}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$, et $\begin{cases} M = \sup\{G(x),\ x \in [a,b]\} \\ m = \inf\{G(x),\ x \in [a,b]\}. \end{cases}$

1) On suppose ici que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer que $mf(a) \leqslant \int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant Mf(a)$.

2) Démontrer la même inégalité si f est seulement continue, en admettant qu'elle est limite uniforme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ décroissantes.

3) Démontrer enfin qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_{t=a}^{c} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 34. *Inégalité de la moyenne*

Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, f décroissante, et $0 \leqslant g \leqslant 1$. On note $G(x) = a + \int_{t=a}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que $\int_{t=a}^{b} fg(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{t=a}^{G(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 35. *Une inégalité*

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = 0$ et $\forall\ t \in [a,b],\ 0 \leqslant f'(t) \leqslant 1$. Comparer $\int_{t=a}^{b} f^3(t)\,\mathrm{d}t$ et $\left(\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$.

On introduira les fonctions : $F(x) = \int_{t=a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, $G(x) = \int_{t=a}^{x} f^3(t)\,\mathrm{d}t$, et $H = F^2 - G$.

Exercice 36. *Intégrales de Wallis*

On note $I_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \cos^n t\,\mathrm{d}t$.

1) Comparer I_n et $\int_{t=0}^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$.

2) En coupant $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en $[0,\alpha]$ et $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, démontrer que $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3) Chercher une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}. En déduire I_{2k} et I_{2k+1} en fonction de k.

4) Démontrer que $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

5) Démontrer que $I_n \sim I_{n-1}$ et en déduire un équivalent simple de I_n puis de C_{2n}^n pour $n \to \infty$.

Exercice 37. *Norme L^∞*

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue non identiquement nulle. On pose $I_n = \int_{t=a}^{b} f^n(t)\,\mathrm{d}t$ et $u_n = \sqrt[n]{I_n}$.

Soit $M = \max\{f(x) \text{ tq } a \leqslant x \leqslant b\}$ et $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M$.

1) Comparer M et u_n.

2) En utilisant la continuité de f en c, démontrer que : $\forall\ \varepsilon \in]0, M[$ il existe $\delta > 0$ tel que $I_n \geqslant \delta(M-\varepsilon)^n$.

3) En déduire $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 38. *Lemme de Lebesgue*

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=a}^{b} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ...

1) si f est de classe $\mathcal{C}^1$.

2) si f est en escalier.

3) si f est continue.

Exercice 39. *Plus grande fonction convexe minorant f*

1) Soit (f_i) une famille de fonctions convexes sur un intervalle I.
On suppose que : $\forall\ x \in I,\ f(x) = \sup(f_i(x))$ existe. Montrer que f est convexe.

2) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ minorée. Montrer qu'il existe une plus grande fonction convexe minorant f. On la note $\tilde{f}$.

3) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ croissante. Montrer que $\int_{t=0}^{1} \tilde{f}(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\int_{t=0}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ (commencer par le cas où f est en escalier).

Exercice 40. *Centrale PC 1998*

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ continue.

1) Montrer qu'il existe une subdivision de $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ telle que :

$$\forall\ k \in [\![0, n-1]\!],\ \int_{t=x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2) Étudier $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

Exercice 41. *Mines MP 2000*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, 2π périodique, ne s'annulant pas. Montrer que $I(f) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'}{f}$ est un entier.

Exercice 42. *Fonctions affines*

Soit $E = \mathcal{C}([a,b])$, et $F = \{f \in \mathcal{C}^2([a,b]),\ \text{tq } f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0\}$.

1) Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe $g \in F$ vérifiant $g'' = f$ si et seulement si $\displaystyle\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} x f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

2) Soit $f \in E$ telle que $\displaystyle\int_{x=a}^{b} f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour toute fonction $g \in F$. Montrer que f est affine.

Exercice 43. *Mines MP 2001*

Soit $a < 0 < b$ et f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $[a,b]$ telle que $\int_0^1 f = 0$. Montrer que $\int_0^1 f^2 \leqslant -ab$.

Solutions

Exercice 3.
3) $\frac{1}{2}f(0)$.

Exercice 7.
DL de $1-\cos u \Longrightarrow \lim = \frac{1}{2}\ln(b/a)$.

Exercice 9.
1) $\ln k$.
2) $\frac{\pi}{8}$.
3) $\frac{4}{e}$.
4) $\frac{1}{3}\int_{t=0}^{3\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t} = \int_{t=0}^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.
5) $\frac{4}{3}n\sqrt{n}$.
6) $\frac{4}{\pi}$.

Exercice 12.
2) $\exp\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 13.
$$a_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{si } b_n < -1 \\ -(b_n-1)^2/4 & \text{si } -1 \leqslant b_n \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } b_n > 1, \end{cases} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n < -1 \\ (a_n+1)^2/4 & \text{si } -1 \leqslant a_n \leqslant 1 \\ a_n & \text{si } a_n > 1. \end{cases}$$
Donc $a_{n+1} = f(a_{n-1})$, $b_{n+1} = g(b_{n-1})$. Point fixe : $a_n \longrightarrow \sqrt{8}-3$, $b_n \longrightarrow 3-\sqrt{8}$.

Exercice 16.
$\frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 17.
$u = \pi - t \Longrightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_{t=0}^{\pi}\frac{1}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_{t=-\pi/2}\pi/2\,\frac{1}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t = \pi$.

Exercice 19.
$I_n = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3}\,)^n$.

Exercice 20.
Couper en intervalles de $k\pi/n$. On obtient $I_n = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 21.
f est paire, π-périodique. $f'(x) = 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \Longrightarrow f(x) = f(\pi/4) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 25.
Comparaison entre $\int_{t=0}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$ et son approximation des trapèzes. Découper et intégrer deux fois par parties, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{8}$.

Exercice 28.
$I = \Big[f'(t)(1+\cos t)\Big]_0^{2\pi} + \int_{t=0}^{2\pi} f''(t)(1+\cos t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Exercice 32.
1) formule de Taylor-intégrale.

Exercice 35.
$H' = f(2F - f^2) = fK$ et $K' = 2f(1-f')$ donc H est croissante et positive.

Exercice 40.

2) Soit $F(x) = \displaystyle\int_{t=a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G = F^{-1}$. Alors $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f \circ G(\frac{k}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \displaystyle\int_{t=a}^{b} f^2(t)\,\mathrm{d}t \Big/ \int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 41.

On a $f = e^g$ avec g de classe $\mathcal{C}^1$ par le thm. de relèvement d'où $I(f) = \dfrac{g(2\pi) - g(0)}{2i\pi} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 42.

1) Il existe toujours une unique fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $g'' = f$, $g(a) = g'(a) = 0$: $g(x) = \displaystyle\int_{t=a}^{x} (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ (Taylor-Intégral).

2) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f_1 : x \longmapsto f(x) - \lambda - \mu x$ vérifie $\displaystyle\int_{x=a}^{b} f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} x f_1(x)\,\mathrm{d}x = 0$. On trouve

$$\begin{cases} (b-a)\lambda + (b^2-a^2)/2\mu &= -\displaystyle\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \\ (b^2-a^2)/2\lambda + (b^3-a^3)/3\mu &= -\displaystyle\int_{x=a}^{b} x f(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

et ce système a pour déterminant $(b-a)^4/12 \neq 0$ donc λ, μ existent et sont uniques. Soit $g_1 \in F$ telle que $g_1'' = f_1$: $\displaystyle\int_{x=a}^{b} g_1''(x) g''(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $g \in F$, en particulier pour $g = g_1$ donc $g_1'' = f_1 = 0$ et $f(x) = \lambda + \mu x$.

Exercice 43.

Soit $g = f - a$. On a $0 \leqslant g \leqslant b - a$ et $\displaystyle\int_0^1 g = -a$ d'où $\displaystyle\int_0^1 g^2 \leqslant (b-a)\int_0^1 g = -a(b-a)$ et $\displaystyle\int_0^1 f^2 = \int_0^1 g^2 + 2a\int_0^1 g + a^2 \leqslant -ab$.